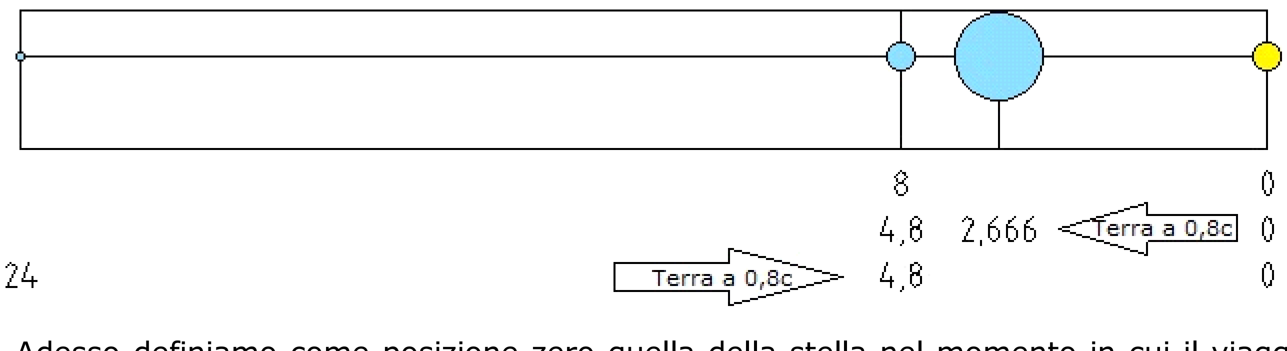
Contrazione dello spazio

La prospettiva

Su answers di Yahoo! Luigi ha posto un quesito (rif.1), che in qualche modo fa riferimento al paradosso dei gemelli. Egli ricorda che il gemello, mentre è in viaggio, vede la distanza Terra-stella minore rispetto a come la misurano gli abitanti della Terra e della stella (parlerò della stella come di un corpo che può avere abitanti). Ma, si domanda, quando il viaggiatore è in prossimità della stella, non vede forse la Terra grande come la vedono gli abitanti della stella? Come è possibile che la considerino a distanze diverse? Vorrebbe cioè ricorrere alla prospettiva per calcolare la distanza di un oggetto. Si può commentare il quesito in questi termini:

Nel momento in cui il viaggiatore rallenta e si appresta ad invertire la rotta, la Terra gli appare grande e distante esattamente come la vedono gli abitanti della stella, poiché è tornato a far parte dello stesso sistema inerziale. Ma durante il viaggio di andata e durante quello di ritorno le cose cambiano. Quando un osservatore guarda lontano non vede mai il presente, ma un'immagine del passato, poiché la luce delle immagini impiega del tempo a raggiungerci; se un corpo si sta allontanando il suo passato è una posizione più vicina a noi (ovvero più vicina di quanto noi calcoliamo essere la sua attuale posizione), se si stà avvicinando il suo passato è una posizione più lontana da noi (più lontana di quella che noi riteniamo essere la sua posizione attuale). Se si vogliono fare dei calcoli bisogna anche considerare la contrazione dello spazio dovuta al moto: se il sistema Terra-stella appare in moto la loro distanza reciproca apparirà più piccola di come la vedono gli abitanti di Terra e stella.

Quando il viaggiatore stà per giungere sulla stella egli vede la Terra in allontanamento, perciò possiamo genericamente affermare che "la vede più grande", mentre all'inizio del ritorno la vede in avvicinamento, perciò "la vede più piccola". Farò riferimento alla situazione descritta nella mia pagina sul paradosso dei gemelli (rif.2), dove per i terrestri la stella dista 8 anni luce, il viaggiatore si muove a 0.8c (80% della velocità della luce) e impiega 10 anni per andare e altrettanti per tornare. Tempo, spazio e velocità sono però relativi, e succede che per il viaggiatore Terra e stella distano tra loro soltanto 4.8 anni luce e il "viaggio" dura 6 anni + 6.

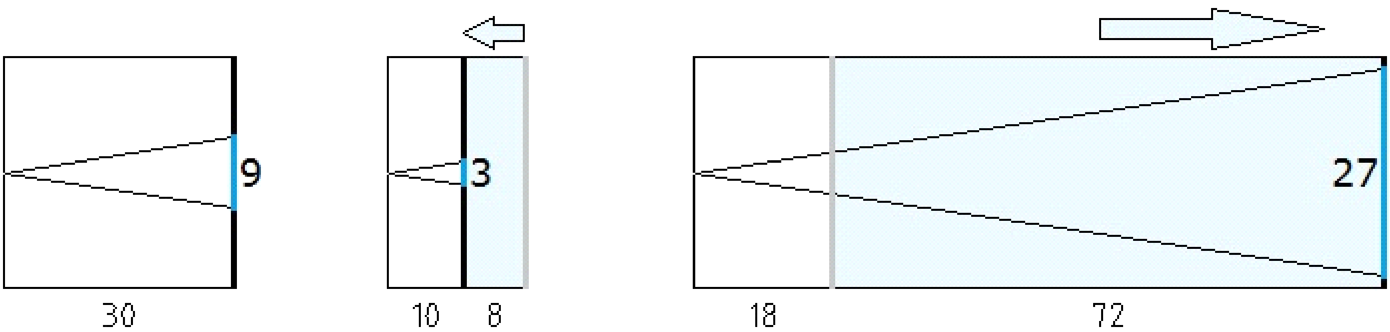


Adesso definiamo come posizione zero quella della stella nel momento in cui il viaggiatore sta invertendo la marcia. Per tutti gli osservatori solidali con il sistema di riferimento terrestre, Terra e stella sono ferme e distano tra loro 8 anni luce; se dalla stella si guarda con un telescopio la Terra, essa si vede alle dimensioni esatte in cui quel corpo fermo dovrebbe apparire a quella distanza.

Per il gemello che vede la stella avvicinarsi alla velocità di 0.8c (nel momento che precede la decelerazione), la Terra si sta allontanando a 0.8c e la sua distanza risulta contratta dello 0.6 ($\sqrt{1 - 0.8^2}$), cioè lontana solo 4.8 anni luce (8 x 0.6) e quindi ha iniziato ad allontanarsi dal viaggiatore non 10, ma 6 anni fa (6 x 0.8c = 4.8 anni luce). Per ulteriori informazioni sulle trasformazioni spazio-temporali dovute al moto fate riferimento alla pagina sul paradosso dei gemelli già citata. Quel che però quest'ultimo osservatore vedrà è l'immagine della Terra come risulterebbe ad una distanza di 2.666 anni luce, cioè nella posizione che aveva raggiunto 3.333 anni dopo la partenza (3.333 x 0.8c = 2.666 anni luce). E 3.333 (partenza dell'immagine) + 2.666 (tempo impiegato dall'immagine per raggiungere la stella) = 6 = gli anni relativi trascorsi dal momento in cui la Terra ha iniziato ad allontanarsi dal viaggiatore. A 2.666 anni luce il suo diamentro appare 3 volte maggiore di quando si trova a 8 anni luce.

Per il gemello che vede la Terra avvicinarsi alla velocità di 0.8c (nel momento in cui termina l'accelerazione) il nostro pianeta dista sempre 4.8 anni luce, ma lo si vede come risulterebbe ad una distanza di 24 anni luce, e grande un terzo di come apparirebbe a 8 anni luce; vediamo perché. Per un corpo che si muove a 0.8c la sua immagine di un anno fa lo precede di 0.2 anni luce. Se osserviamo un corpo che si avvicina a noi a 0.8c e si trova ancora lontano 4.8 anni luce, noi vediamo la sua immagine di 4.8 / 0.2 = 24 anni fa, e che ovviamente è partita 24 anni luce lontano da noi.

Per gli abitanti della stella però il corpo in moto è l'astronave, non la Terra; e quindi come spiegano il risultato delle precedenti osservazioni? Il motivo per cui strumenti ottici come i telescopi, le fotocamere o i nostri occhi possano farci vedere, osservando dalla stessa posizione, dimensioni diverse di un corpo lontano, in base al nostro moto, risiede nel funzionamento di questi apparecchi. Una fotocamera, semplificando molto, è costituita da un foro e una parete sensibile. La luce che entra dal foro produce un cono di luce, che si allarga mentre avanza verso la parte sensibile. Il tempo impiegato dalla luce per andare dal foro alla parete determina la grandezza dell'immagine che andrà a formarsi; più tempo passa, più grande sarà l'immagine. E' ovvio che se la parete sensibile si muove verso la luce, viene raggiunta più rapidamente, e la base del cono di luce avrà un diametro minore. In caso di allontanamento avviene il contrario. Bisogna anche considerare che in caso di moto le dimensioni dell'apparato ottico si contraggono.



Calcoliamo per esempio cosa succede nel caso in cui un osservatore guardi la Terra ferma di fronte a sé, e cosa succederebbe ad un osservatore che si stesse avvicinando oppure allontanando dalla Terra, come capita al viaggiatore del paradosso nel periodo in cui inverte la rotta. Nel primo dei 3 disegni sopra vediamo la sezione di una camera cubica di 30 cm di lato, in cui la luce penetra da un foro centrale andando a formare un disco di 9 cm sulla parete opposta. Nel caso in cui la camera stia muovendosi a 0,8c verso l'immagine (secondo disegno) le sue dimensioni longitudinali al moto si sono contratte da 30 a 18 cm e mentre la luce penetrata dal foro avanza di 10 la parete sensibile gli va incontro di 8, cosicché l'immagine che si forma ha solo 3 cm di diametro, cioé un terzo di prima. Se invece la camera si stesse allontanando a 0,8c dall'immagine, essa sarebbe sempre contratta a 18 cm, ma la luce penetrata nel foro raggiungerebbe la parete sensibile 90 cm oltre, producendo un'immagine di 27 cm di diamentro (il triplo di quella "normale"); infatti mentre la luce percorre 90 cm la parete si allontana di 90 x 0,8 = 72.

Come si vede le osservazioni con il telescopio danno risultati diversi a seconda del moto relativo tra osservatore e oggetto osservato, ma il risultato è indipendente da chi dei due si voglia considerare in moto.

Trasformazione delle coordinate

Un navigante, Luca, mi ha posto un quesito. Immaginiamo che un osservatore, che chiameremo A, registri le coordinate spazio-temporali di due eventi E1 (Ax1, At1) e E2 (Ax2, At2) e quindi calcoli la distanza che separa i due eventi (distanza che chiameremo Ad). Un secondo osservatore chiamato B, in moto rispetto ad A alla velocità di 0.8c (per le velocità utilizzeremo come unità di misura il rapporto annoluce / anno, quindi per la velocità della luce c = 1), può calcolare le coordinate degli eventi relative al proprio sistema di riferimento con:

$Bx_n = (Ax_n - vt) / \sqrt{1-(v^2/c^2)}$ per la coordinata spaziale
$Bt_n = (At_n - vx) / \sqrt{1-(v^2/c^2)}$ per la coordinata temporale

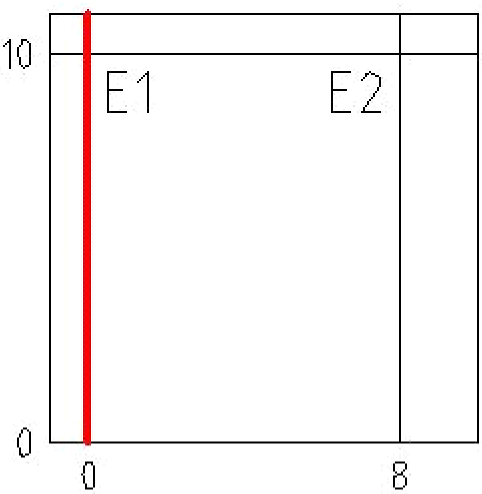
e successivamente potrà calcolare la distanza che separa gli eventi nel sistema di riferimento B (Bd). Luca si domandava se è possibile semplificare la cosa utilizzando la formula per la contrazione delle distanze direttamente su Ad, cioé:

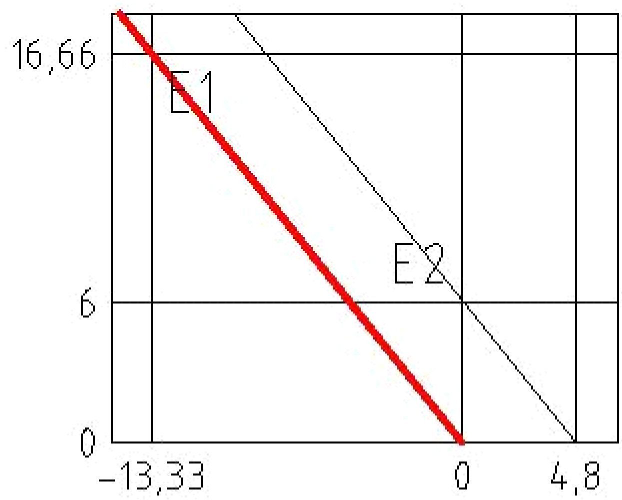
$Bd = Ad \sqrt{1-v^2/c^2}$

Ovviamente no. Nel sistema di riferimento di A i luoghi Ax1 e Ax2 sono interpretabili come punti fissi all'interno del sistema, simili alle estremita di un regolo fermo lungo Ad, e i tempi in cui si verificano gli eventi sono ininfluenti; per B invece l'ipotetico regolo è in moto e i tempi degli avvenimenti sono fondamentali per calcolare Bx1 e Bx2 e quindi Bd.

Facciamo una prova:

E1 (Ax1 = 0 ; At1 = 10) ; E2 (Ax2 = 8 ; At2 = 10) ; Ad = 8 - 0 = 8
$\sqrt{1-(0.8^2/1^2)} = 0.6$
Bx1 = (0 - 0.8 x 10) / 0.6 = -13.33 ; Bt1 = (10 - 0.8 x 0) / 0.6 = 16.66
Bx2 = (8 - 0.8 x 10) / 0.6 = 0 ; Bt2 = (10 - 0.8 x 8) / 0.6 = 6
Bd = 0 - (-13.33) = 13.33

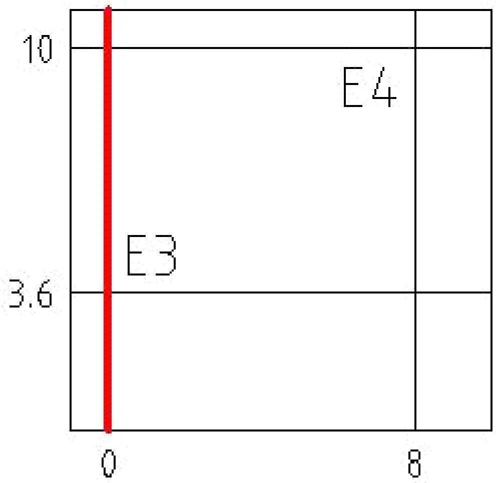


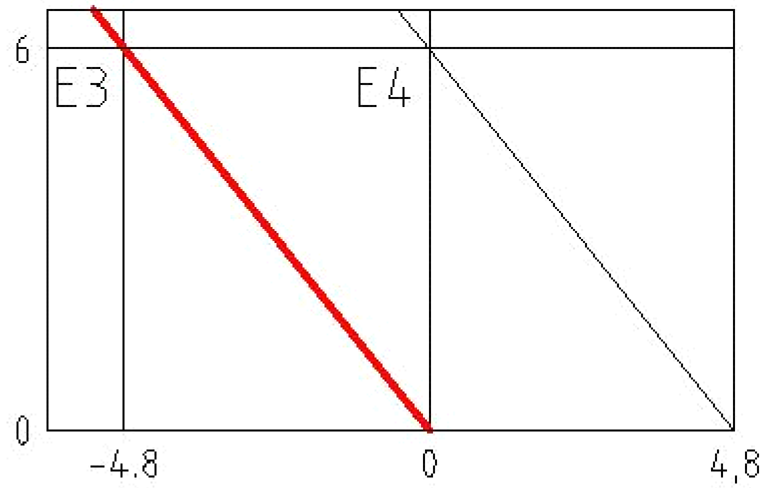


Risulta qui evidente che trasformando i valori relativamente ad un osservatore B che veda A (linea rossa dei diagrammi) in moto a 0.8c verso sinistra, scopriamo che E2 non risulta più simultaneo ad E1 ma molto precedente, e quando E1 si verifica questa ipotetica estremità del regolo (che per B misurerebbe 8 x 0.6 = 4.8) si è molto allontanata. Perciò la formula per la semplice contrazione delle distanze non funzionerebbe, restituendo solo la misura del "regolo" contratto:
Bd = Ad x 0.6 = 8 x 0.6 = **4.8** invece di **13.33**

Ma il quesito di Luca è comunque interessante, perché esistono delle eccezioni alla regola: tutti quei casi in cui, per l'osservatore B, E1 e E2 risultino simultanei. In questi casi potremmo usare la formula per la contrazione delle distanze. Vediamo infatti quest'altro esempio:

E3 (Ax3 = 0 ; At3 = 3.6) ; E4 (Ax4 = 8 ; At4 = 10) ; Ad = 8
Bx3 = (0 - 0.8 x 3.6) / 0.6 = -4.8 ; Bt3 = (3.6 - 0.8 x 0) / 0.6 = 6
Bx4 = (8 - 0.8 x 10) / 0.6 = 0 ; Bt4 = (10 - 0.8 x 8) / 0.6 = 6
Bd = 0 - (-4.8) = **4.8**





In questo caso la formula per la contrazione delle distanze dà lo stesso risultato:
Bd = Ad x 0.6 = 8 x 0.6 = **4.8**

Se quanto esposto è vero, allora deve essere vero anche il contrario. Cioè in tutti quei casi in cui i due eventi appaiono simultanei per A, allora B può ricavare Bd direttamente da Ad, con:

$Bd = Ad / \sqrt{(1-v^2/c^2)}$

Infatti nel primo esempio, dove per l'osservatore A gli eventi E1 e E2 sono simultanei, si può calcolare direttamente:
Bd = 8 / 0.6 = **13.33**

Maurizio Cavini
24 Novembre 2014

Riferimenti

https://it.answers.yahoo.com/question/index?qid=20140212140042AAXVQzL
http://www.mauriziocavini.it/Testi/Spigolature/Spighe4.html
http://www.mauriziocavini.it/Testi/Spigolature/Spighe8.html

cavini.maurizio@gmail.com