

# PARADOSSO DEI GEMELLI

## **GALILEO GALILEI - LA RELATIVITÀ DEL MOTO**

Quando all'inizio del 1600 **Galileo Galilei** (1564-1642) prese a difendere il sistema eliocentrico copernicano (sostenendo perciò che la Terra era in moto nello spazio) dovette smentire i filosofi aristotelici. Aristotele infatti pensava che un corpo in caduta libera dirige sempre verso il centro della Terra per la strada più breve possibile, cioè in linea retta verticale. Se ciò fosse vero un sasso lasciato cadere dalla sommità dell'albero di una nave (in navigazione sul mare) non cadrebbe alla base del palo, poiché durante la caduta il palo si sarebbe mosso. Ma Galileo dimostrò che questo era falso, semplicemente sperimentandolo; il sasso cade sempre alla base del palo, poiché conserva la componente di moto orizzontale che ha prima della caduta. Questo gli servì per dimostrare che quando un sasso cadendo dal culmine di una torre atterra alla sua base, ciò non dimostra che la Terra sia ferma nello spazio.

In termini più formali il concetto di relatività galileiana afferma che le leggi della meccanica risultano valide per qualsiasi *sistema di riferimento inerziale*, (cioè un sistema di coordinate costruite prendendo a riferimento almeno tre punti che abbiano posizioni e distanze costanti tra loro nel tempo e che non subiscano accelerazioni, come i punti strutturali di una nave, ferma o in moto rettilineo costante). Dimostrò quindi che qualsiasi esperimento effettuato in una cabina all'interno della nave, come far cadere gocce d'acqua dall'alto nel collo d'una bottiglia, si realizza allo stesso modo sia quando la nave è ferma in porto, sia quando è in moto sul mare tranquillo. Attraverso esperimenti di laboratorio non è possibile stabilire se il laboratorio, o la Terra (o un'astronave), siano in moto, se non relativamente a qualcos'altro, che possiamo assumere per convenzione come fermo.

## **ALBERT EINSTEIN - LA RELATIVITÀ RISTRETTA**

Nel 1905, mentre lavorava ancora all'Ufficio Brevetti di Berna, il tedesco **Albert Einstein** (1879-1955) formulò la cosiddetta relatività ristretta, che estende il concetto di relatività galileiana. Essa si basa su due postulati.

- Il primo afferma che tutte le leggi della fisica sono le stesse per gli osservatori che si muovono di moto rettilineo uniforme ovvero inerziale.
- Il secondo ribadisce il principio di costanza della velocità della luce, dichiarando che la luce si propaga nel vuoto a una velocità "c" che è indipendente dal moto della sorgente.

Senza entrare nei dettagli, far convivere il primo postulato con il secondo costringe per via logica ad attribuire al tempo e allo spazio valori relativi. Si evince che nel tentativo di misurare la durata di un qualsiasi fenomeno fisico o la dimensione di un oggetto, ovvero la distanza tra due punti in un preciso momento, ogni osservatore inerziale otterrà risultati soggettivi, che derivano dal sistema inerziale scelto come riferimento. In particolare, se osserviamo un oggetto che si muove ad alta velocità vedremo le sue dimensioni ridotte nel senso del moto e il suo tempo rallentato, ma egli potrà dire lo stesso di noi.

Queste premesse consentirono al fisico francese **Paul Langevin** (1872-1946) di formulare il cosiddetto "paradosso" dei gemelli, un immaginario esperimento che porta ad un esito imprevisto. Il "paradosso" suppone che uno di due gemelli, che hanno fin qui vissuto entrambi sulla Terra, parta per un lungo viaggio spaziale, ad esempio verso una stella lontana e ritorno, ad una velocità sufficiente (in base alla relatività di Einstein) a provocare un'evidente ritardo nell'invecchiamento del gemello viaggiatore. Con il suo ritorno a Terra i gemelli avranno età diverse, nel senso che il viaggiatore sarà non solo fisiologicamente più giovane, ma anche la sua esperienza di vita sarà stata complessivamente più breve di chi ha vissuto sulla Terra. Questo esito può essere definito paradossale, ma solo nel senso che è estraneo alle nostre esperienze quotidiane, mentre la sua validità è stata più volte confermata da successivi esperimenti.

Negli anni '50, fino ai primi anni '60, il professor **Herbert Dingle** (1890-1978) portò avanti una personale battaglia per contestare alcuni aspetti della relatività. Egli fu autore di un sillogismo che tenta di dimostrare come, nel caso del paradosso dei gemelli, il previsto rallentamento degli orologi in moto nasconda un'illogicità. Abbiamo infatti sostenuto che il moto è relativo, ma anche che il moto provoca un rallentamento degli orologi, e questa seconda affermazione sembrerebbe in grado di smentire la prima, consentendoci di individuare in maniera certa gli orologi in moto. In questo caso il termine "paradossale" starebbe a significare "impossibile".

Il sillogismo di Dingle recita così:

1 (Premessa maggiore) Secondo il postulato di relatività se due corpi (ad esempio due orologi identici) prima si separano poi si riuniscono non c'è alcun fenomeno osservabile che possa dimostrare in senso assoluto che uno si è mosso anziché l'altro.

2 (Premessa minore) Se dopo il riavvicinamento un orologio fosse ritardato di una quantità dipendente dal movimento relativo, e l'altro no, questo fenomeno mostrerebbe che il primo si è mosso e non il secondo.

3 (Conclusione) Pertanto, se il postulato di relatività è vero, gli orologi debbono essere egualmente ritardati, o non esserlo affatto: in ogni caso i loro quadranti debbono mostrare lo stesso tempo dopo la riunione se lo mostravano prima della separazione.

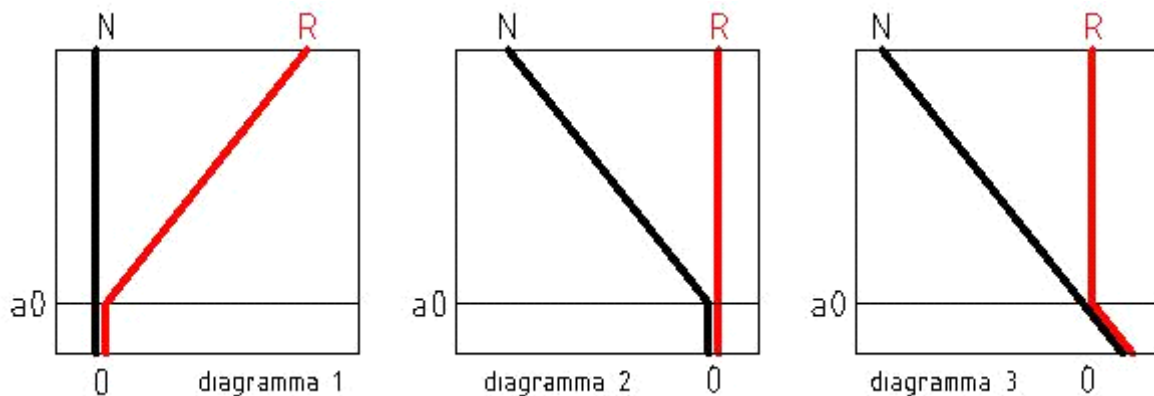
Come vedremo, con questo sillogismo Dingle interpreta malamente la relatività del moto di Galileo, che Einstein incorpora ed estende nella nuova teoria. La premessa maggiore non è corretta: è vero, tra due corpi in allontanamento costante è impossibile stabilire con certezza chi si stia muovendo, ma se un astronauta viaggia avanti e indietro tra due pianeti (interrompendo almeno una volta il suo moto inerziale) possiamo affermare in modo assoluto che almeno in un periodo egli si sia mosso. Anche la premessa minore è scorretta: il ritardo di un orologio dimostra che esso si è mosso, ma non dimostra che l'altro non si è mosso; potrebbero averlo fatto entrambi con moti diversi. La conclusione del sillogismo deve perciò essere rifiutata.

## DIAGRAMMI DI MINKOWSKI

Da adesso descriveremo il moto dei corpi esaminandoli attraverso dei diagrammi di Minkowski, che portano il nome del loro ideatore **Hermann Minkowski** (1864-1909), matematico tedesco di origine russa, che contribuì all'interpretazione geometrica di uno spazio a 4 dimensioni. Si tratterà di diagrammi che riportano lo spazio sull'asse orizzontale e il tempo sull'asse verticale. Si noti che, poiché il diagramma è a 2 dimensioni ed una è occupata dalla variabile tempo, dello spazio si descriverà un'unica dimensione che può essere percorsa avanti e indietro, cioè verso destra oppure verso sinistra.

I soggetti che vogliamo considerare fermi sono illustrati con linee verticali: mentre il tempo passa la linea si allunga, ma non ha nessuno spostamento laterale, cioè spaziale. Chi viene considerato in movimento è illustrato come una linea diagonale: maggiore è la sua presunta velocità, più la linea risulta adagiata sull'orizzontale, verso destra o sinistra a seconda della sua direzione. Se il tempo di un anno sull'asse verticale misurasse la stessa lunghezza di un anno-luce su quello orizzontale, la velocità della luce verrebbe rappresentata come una linea inclinata di  $45^\circ$ , poiché ovviamente la luce percorre un anno-luce in un anno di tempo.

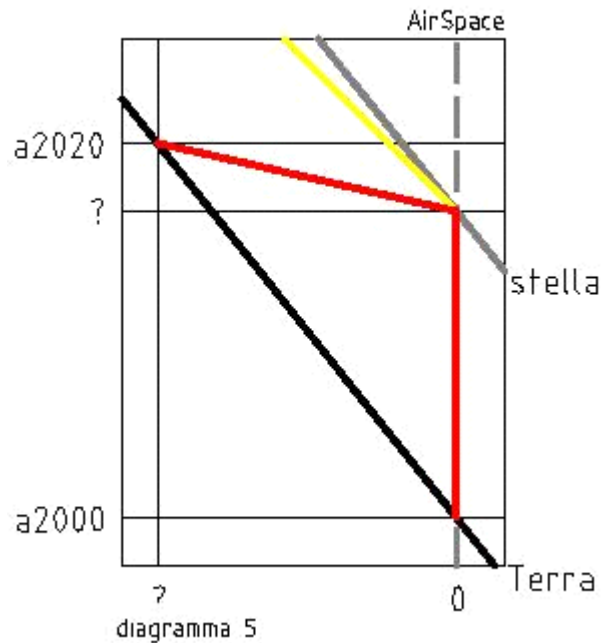
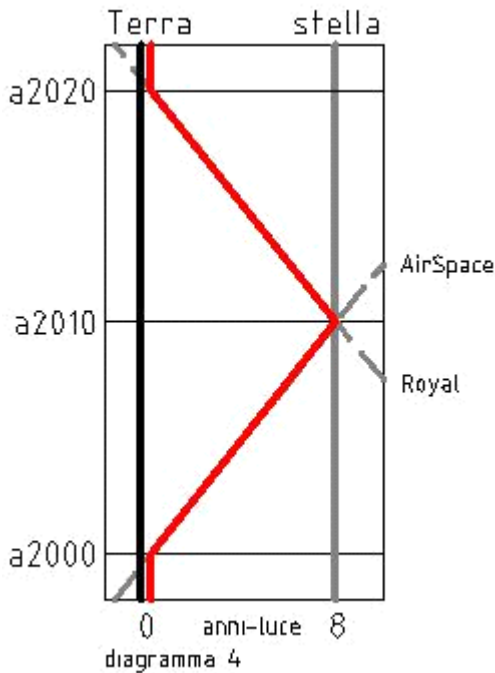
La velocità della luce è considerata la velocità massima raggiungibile, ma a titolo esemplificativo possiamo aggiungere che nel diagramma una traiettoria orizzontale equivarrebbe ad una velocità infinita, consentendo di raggiungere istantaneamente qualunque luogo.



Il diagramma 1 illustra due corpi, uno nero (N) e uno rosso (R), che viaggiano affiancati fino all'anno zero ( $a_0$ ) quando, in un punto chiamato coordinata spaziale zero (0) il corpo rosso subisce una violenta accelerazione che da allora lo spinge con moto costante (inerziale) lontano dal corpo nero, a velocità  $0.8c$  (80% della velocità della luce). Da adesso, in accordo con la relatività del moto di Galileo, potremmo anche immaginare il corpo rosso fermo e il nero in allontanamento con moto inerziale. Dingle però, forzando il concetto di simmetria, sembra credere che la situazione possa essere descritta con il diagramma 2, cioè un diagramma speculare al primo. Il secondo diagramma però non ha senso, il corpo che subisce l'accelerazione è il rosso ed è lui che deve cambiare stato di moto. Noi non sappiamo se R dopo  $a_0$  sia in moto oppure no, ma non possiamo considerarlo fermo sia prima che dopo  $a_0$ . Il diagramma 3 invece, un diagramma 1 ruotato, descrive un'alternativa corretta del modo in cui possiamo interpretare gli avvenimenti: qui i corpi N e R viaggiavano affiancati verso sinistra quando, nel momento  $a_0$ , in prossimità del punto zero, R decelera fino a fermarsi, abbandonando N al suo viaggio.

## IL VIAGGIO DEL GEMELLO

Cominciamo adesso ad illustrare il percorso compiuto dal gemello viaggiatore. Per rendere più evidenti le varie fasi ipotizziamo che per l'**A**ndata il viaggiatore utilizzi un volo di linea della **AirSpace Travel**, mentre per il **R**itorno si imbarchi sulla **Royal Ship of the Stars**, cioè separiamo le due fasi utilizzando due astronavi diverse. Egli parte nell'anno 2000, la sua meta intermedia è una stella distante 8 anni luce ed egli compie entrambi i tragitti alla velocità di  $0.8c$ ; impiega 10 anni per andare e 10 per tornare, quindi i due gemelli si incontrano nuovamente a Terra nel 2020.



Il diagramma 4 illustra bene gli avvenimenti, così come sono osservati dal sistema inerziale cui appartiene la Terra, o la stella (che considera questi due corpi sostanzialmente fermi e perciò descritti da due linee verticali). Questo diagramma però non può essere ruotato, come abbiamo fatto precedentemente: se tentiamo di descrivere gli avvenimenti (così come li vede la AirSpace Travel) semplicemente ruotandolo, otteniamo qualcosa di simile al diagramma 5, che contiene molte incongruenze. Infatti, se ad esempio noi ipotizziamo di mandare verso Terra un segnale luminoso subito prima di partire dalla stella, scopriamo che il viaggio di ritorno sembra compiuto a velocità molto superiore a quella della luce, il che è impossibile. Nel diagramma la luce è rappresentata da una linea gialla che, come precedentemente specificato, deve essere inclinata di  $45^\circ$  per poter percorrere 1 anno-luce in un anno; la linea del ritorno invece si solleva soltanto di circa  $12.7^\circ$  dall'orizzontale, il che dovrebbe rappresentare quasi 4 volte e mezzo la velocità della luce. Qualcosa non va.

## LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

Per calcolare le trasformazioni che subiscono i tempi e le distanze di un corpo in moto, possiamo usare le cosiddette "trasformazioni di Lorentz", dal nome del fisico olandese **Hendrik Lorentz** (1853-1928), che consentono di trasferire questi valori da un sistema di riferimento ad un'altro. Ragionando in termini semplificati possiamo dire che se misuriamo un'astronave ferma e poi la ri-misuriamo mentre è in moto, ci accorgiamo che adesso si è accorciata di un fattore  $\gamma$  (gamma) ed anche che i suoi orologi a bordo hanno rallentato il loro ritmo di un fattore  $\gamma$ . Per sapere cosa succede al gemello in moto, o per trasformare il diagramma 4 in altri diagrammi, fondati su altri sistemi di riferimento, dobbiamo quindi prima calcolare questo fattore; ecco come:

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - (v^2 / c^2)}$$

ovvero

gamma = 1 / radice quadrata (1 - (velocità del corpo<sup>2</sup> / velocità della luce<sup>2</sup>))

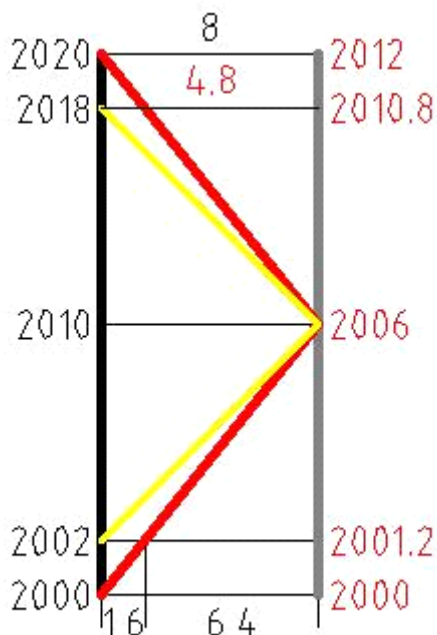
e se noi utilizziamo come unità di velocità quella della luce (c = 1), possiamo semplificare ulteriormente il calcolo in

$$\text{gamma} = 1 / \text{radice quadrata} (1 - \text{velocità del corpo}^2)$$

Quindi se ipotizziamo che il gemello viaggiatore compia entrambi i tragitti di andata e ritorno a 0.8c (80% della velocità della luce), il suo valore di gamma (mentre è in viaggio) sarà:

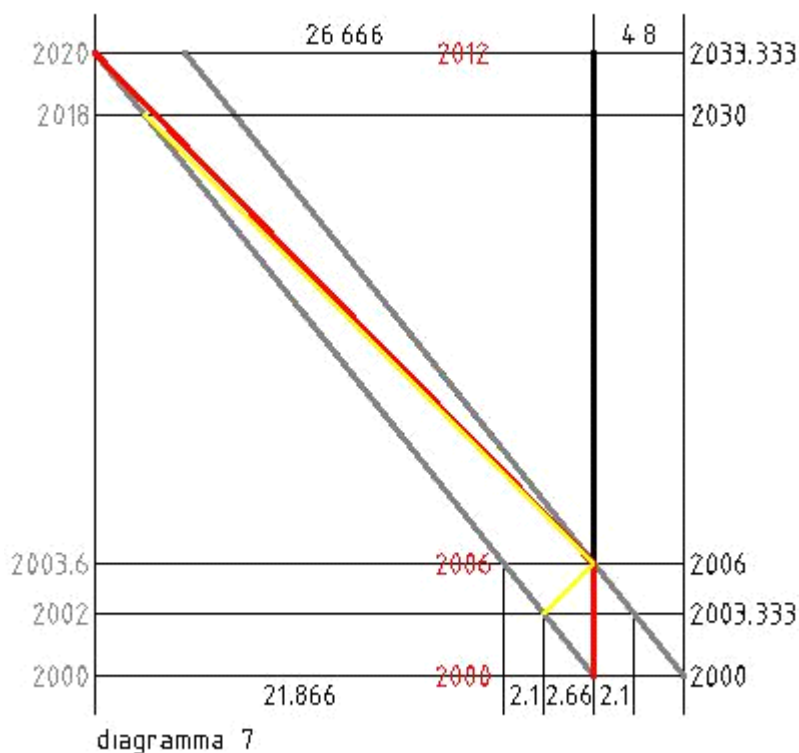
$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - (0.8^2)} = 1.666666 \text{ oppure}$$

$$1/\gamma = \sqrt{1 - (0.8^2)} = 0.6$$



Il diagramma 6 dimostra come i terrestri possono utilizzare il valore di  $1/\text{gamma}$  (0.6) per prevedere il punto di vista del viaggiatore e il suo rallentamento temporale. Il viaggiatore raggiunge la stella mentre il suo orologio segna l'anno 2006 ( $2000 + (10 \times 0.6)$ ) e torna a Terra mentre segna

il 2012 ( $2000 + (20 \times 0.6)$ ). Per il viaggiatore Terra e stella distano 4.8 anni-luce ( $8 \times 0.6$ ). Quando è sulla stella, se osserva la Terra lontana vede ciò che succedeva laggiù quando i loro orologi segnavano il 2002. Sulla Terra chi osserva la stella con un telescopio vede l'arrivo del gemello solo nel 2018. In questo diagramma, tranne che per le date di partenza e arrivo in cui i gemelli sono vicini, i numeri rossi a destra (l'orologio del viaggiatore) trovano corrispondenza simultanea nelle date a sinistra solo utilizzando le linee di simultaneità della Terra, cioè il sistema a cui il diagramma si riferisce. Chiarirò meglio successivamente il significato delle linee di simultaneità.



Il diagramma 7 illustra come è visto il viaggio del gemello dall'AirSpace Travel. La linea nera disegna la posizione dell'astronave e i numeri a destra il suo orologio. Linea e numeri grigi a sinistra si riferiscono al sistema Terra-stella, mentre in rosso vediamo il tragitto e l'orologio del viaggiatore. Fino al suo arrivo sulla stella gli orologi del viaggiatore e dell'AirSpace, che viaggiano insieme, sono ovviamente sincronizzati. L'orologio del terrestre, che qui viene interpretato come in moto a  $0.8c$ , è rallentato e avanza di 20 anni in 33.333 ( $20 / 0.6$ ). Durante il ritorno invece il viaggiatore percorre 26.666 anni-luce in 27.333 anni; egli viaggia quindi alla velocità di  $0.975597c$  ( $26.666 / 27.333$ ). Il suo valore di  $1/\gamma$  è

$$1/\gamma = \sqrt{(1 - (0.975609^2))} = 0.219515$$

perciò durante i 27.333 anni del ritorno il suo orologio avanza come all'andata:  $27.333 \times 0.219515 = 6$  anni.



## LINEE DI SIMULTANEITÀ

I diagrammi precedenti contengono alcuni eventi, come la partenza del gemello, l'arrivo sulla stella, il ritorno sulla Terra. Questi eventi sono posizionati in punti precisi della mappa spazio-temporale, in base al luogo e al momento in cui avvengono. Il diagramma sottostante è costruito con le misure disponibili a Terra (durata di entrambi i viaggi 10 anni, distanza Terra-stella 8 anni luce, velocità di navigazione  $0.8c$ ). Se noi tracciamo le linee di simultaneità, ovvero il presente dei tre avvenimenti principali, che sono le linee nere orizzontali, possiamo vedere che l'arrivo sulla stella avviene nell'anno terrestre 2010. Questo significa che gli eventi "arrivo del viaggiatore sulla stella" e "orologi terrestri che segnano l'anno 2010" sono contemporanei. Ma come previsto dalla relatività di Einstein il tempo e lo spazio sono variabili relative. Mentre è possibile stabilire una simultaneità assoluta per due orologi vicini (altrimenti non potremmo sincronizzarli in modo assoluto), quando gli strumenti si allontanano ogni osservatore stabilisce le simultaneità in base alle linee del suo sistema di riferimento, che se vengono tracciate nel diagramma di un'altro sistema risultano inclinate.

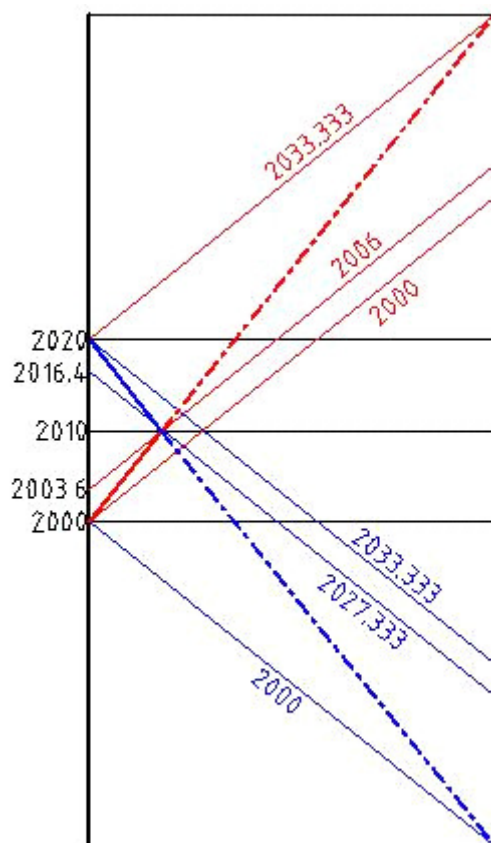


diagramma 9

Per il corpo rosso l'arrivo sulla stella avviene nell'anno 2006 e calcola che in quel momento sulla Terra gli orologi segnano il 2003.6; inoltre prevede l'arrivo di un eventuale viaggiatore di ritorno nell'anno 2033.333, mentre gli orologi terrestri segneranno il 2020. Per il corpo blu esistono invece altre simultaneità. Come abbiamo già visto, nel periodo arrivo-partenza sulla stella, tutti gli osservatori presenti nei pressi della stella, indipendentemente dal loro moto, con i loro telescopi vedono la Terra nel 2002, ma elaborano questo dato in modo diverso. Il significato di questi numeri è naturalmente assai più chiaro studiando i precedenti diagrammi dedicati ai rispettivi sistemi di riferimento, diag. 6, 7 e 8.



## EFFETTO DOPPLER

Se noi osserviamo un orologio (in senso esteso anche la fonte di una frequenza d'onda) in moto rispetto a noi, il suo ritmo è modificato: più lento se il corpo si stà allontanando e più rapido se si stà avvicinando. Il fenomeno si chiama effetto doppler, dal nome del fisico austriaco **Christian Doppler** (1803-53), e il motivo del fenomeno è facilmente intuibile.

I nostri due gemelli vedono l'orologio dell'altro rallentare durante l'andata ed accelerare durante il ritorno, e possiamo perciò inizialmente imputare questo avvenimento all'effetto doppler, dovuto al movimento dell'osservatore, o della sorgente del segnale, o di entrambi. Nel caso di un moto a  $0.8c$ , se non esistesse la dilatazione relativistica del tempo, durante l'andata il rapporto dovrebbe essere di 1:5 per chi si allontana e di 1:1.8 per chi rimane fermo (stiamo ragionando con segnali che si muovono alla velocità della luce); avremmo perciò uno strumento per individuare il moto assoluto. Ma aggiungendo la dilatazione temporale il rapporto diventa 1:3 per entrambi, rendendo gli osservatori perfettamente intercambiabili, nel senso che condizioni ipoteticamente opposte restituiscono gli stessi risultati. Questo rapporto (1:3) deriva dalla velocità relativa tra i due soggetti: se il gemello raggiungesse la stella con una velocità diversa da  $0.8c$  il rapporto sarebbe diverso.

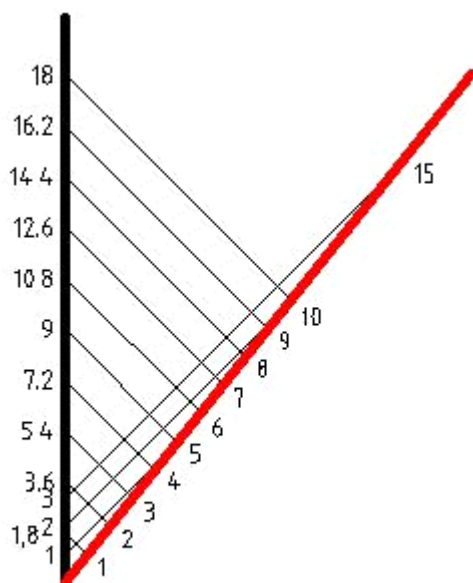


diagramma 10

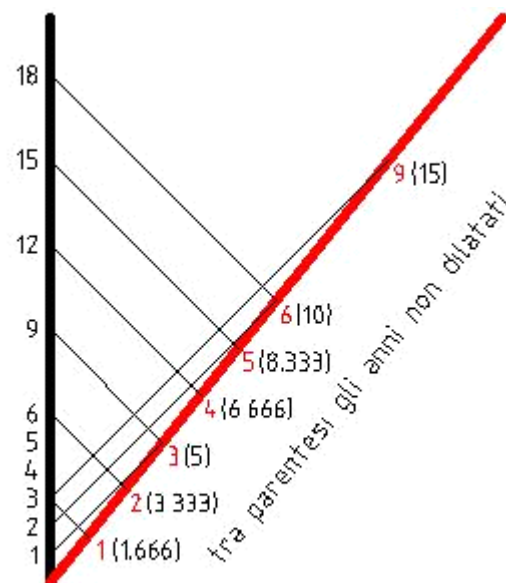
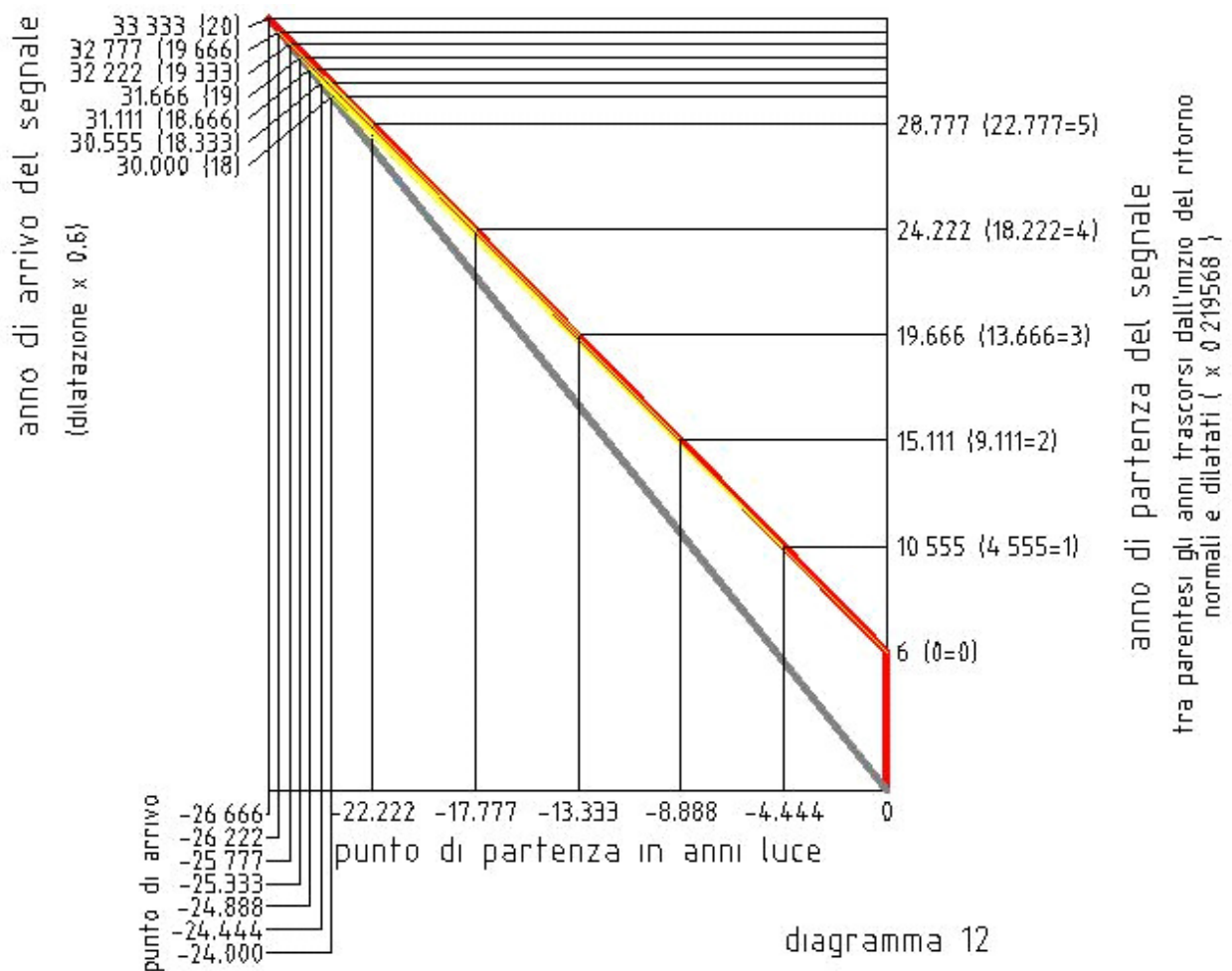


diagramma 11

Il rapporto 1:3 osservato dai gemelli deve essere coerente qualunque sia il sistema inerziale da cui osserviamo gli avvenimenti. Il seguente diagramma (in cui si ipotizza come fermo il viaggiatore durante l'andata) esamina per esempio l'ipotesi che il viaggiatore invii a Terra un segnale all'anno (relativo). Abbiamo visto che durante il ritorno i segnali dovrebbero essere ricevuti dai terrestri con frequenza triplicata, cioè ogni 0.333 anni relativi. Come già calcolato i fattori di dilatazione temporale sono:

- per la Terra  $1/\gamma = \sqrt{1 - (0.8^2)} = 0.6$

- per il viaggiatore  $1/\gamma = \sqrt{1 - (0.975609^2)} = 0.219515$

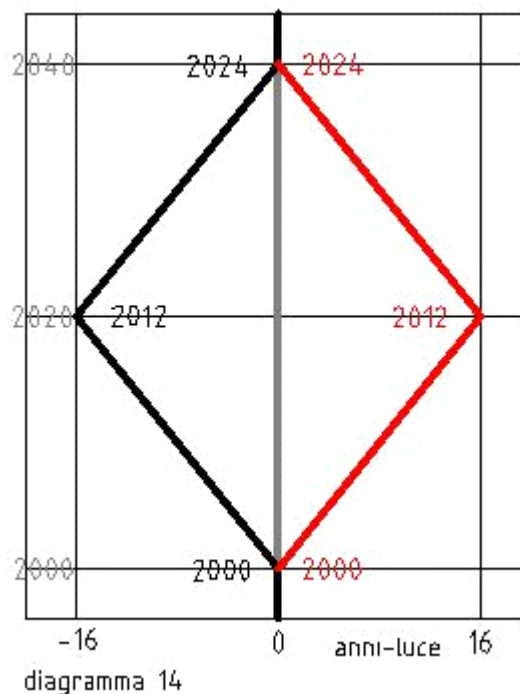
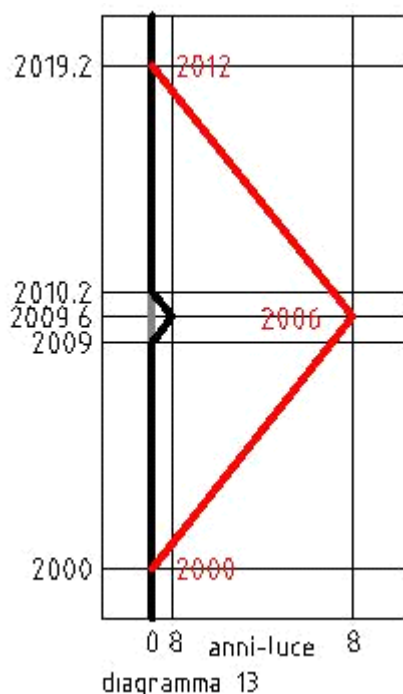


E infatti 0.333 anni terrestri nel diagramma equivalgono a  $(0.333 / 0.60)$  0.555 anni, durante i quali la Terra percorre  $(0.555 \times 0.80)$  0.444 anni luce, cioè diminuisce di  $(0.555 - 0.444)$  0.111 anni luce il vantaggio che ha rispetto ai segnali che la inseguono. E 0.111 anni luce è esattamente l'intervallo che separa ogni segnale in arrivo, poichè ogni segnale viene inviato ogni  $(1 / 0.219515)$  4.555 anni, durante i quali il viaggiatore percorre  $(4.555 \times 0.975609)$  4.444 anni luce, ovvero allontanandosi di  $(4.555 - 4.444)$  0.111 anni luce dal precedente segnale.

## RELATIVITÀ GENERALE

Talvolta per spiegare il "paradosso" si fa ricorso alla relatività generale, teoria più vasta che studia le deformazioni spazio-temporali indotte dalla forza di gravità e ci permette di lavorare con osservatori e corpi accelerati (in una certa misura esiste equivalenza tra corpi accelerati e corpi sottoposti a forza di gravità). Ma come abbiamo visto questo non è necessario, perché la relatività ristretta non genera alcun paradosso nel descrivere gli avvenimenti. Questo succede anche perché si è ipotizzato per il gemello un'accelerazione eccezionale, estremamente intensa e breve, così rapida che non ha il tempo di influenzare in modo significativo i risultati. Ovviamente l'accelerazione è responsabile dei risultati, ma solo perché fa cambiare lo stato di moto originario del viaggiatore, e il moto genera dilatazioni temporali.

Che il motivo del ritardo degli orologi non risieda nell'accelerazione in sé, si intuisce anche da alcune osservazioni:



Nel diagramma 13, a metà periodo, facciamo compiere anche al sedentario un breve viaggio, che lo sottopone ad accelerazioni identiche all'altro gemello; se egli fa un viaggio di andata lungo soltanto 1 anno + 1 di ritorno il suo orologio ritarda soltanto di 0.8 anni. E se accorciamo ulteriormente il suo percorso, la differenza finale di età tra i due gemelli tende sempre più agli 8 anni originali, pur in presenza di accelerazioni identiche per entrambi.

Nel diagramma 14 possiamo osservare come raddoppiando il periodo di viaggio, da 20 a 40 anni, il rallentamento è doppio, evidenziando un rapporto diretto tra ritardo e periodo di moto. Immaginiamo poi di far compiere un viaggio simile all'altro gemello, ma in direzione opposta. Se i due gemelli avranno al loro incontro la stessa età, ciò dimostra che se anche tutti i soggetti fossero immersi nel campo gravitazionale di un lontano corpo massivo, questo non sta influenzando in modo percettibile i risultati dei nostri esperimenti.

Infine possiamo ricordare che l'esperimento si potrebbe benissimo

eseguire, anziché con due gemelli, con tre orologi: uno a Terra e due su astronavi che viaggiano in senso opposto e che non fanno fermate, controllando semplicemente la sincronizzazione degli orologi nel momento in cui si incrociano, evitando quindi le accelerazioni, e il risultato finale non sarebbe in contraddizione con l'esperimento classico.

## CONCLUSIONI

Abbiamo dimostrato che il "paradosso" dei gemelli in realtà non genera conflitti logici, ed è descrivibile in modo compiuto attraverso la relatività ristretta e le trasformazioni di Lorentz. Vorrei terminare citando l'apertura del capitolo "Relatività e relativismo", da "La fisica del Novecento - Per un bilancio critico" di Franco Selleri:

In alcuni ambienti scientifici talvolta si fa confusione fra la teoria della relatività e l'idea del relativismo, anche se in realtà si tratta di cose distinte. La relatività è una teoria scientifica con i suoi postulati, la sua struttura logica e la sua base empirica. L'idea del relativismo afferma invece che gli osservatori inerziali sono *in tutti i sensi* equivalenti l'uno all'altro e che molto si può imparare sul mondo in cui viviamo ragionando su questa perfetta equivalenza. ...

Mi sembra che il paradosso dimostri che i gemelli non sono perfettamente equivalenti, tant'è che a dispetto di quanto previsto da Dingle alla fine il viaggiatore è più giovane. Il presunto e smentito paradosso ci suggerisce che il viaggiatore si è mosso in modo diverso dal sedentario e la dilatazione temporale dovuta al moto lo dimostra: sicuramente egli non è sempre rimasto fermo. Egli si è mosso mentre il terrestre era fermo, *oppure* egli era fermo mentre la stella lo raggiungeva e poi ha dovuto inseguire una Terra che sfuggiva, *oppure* egli ha inseguito a lungo la stella e poi si è fermato ad aspettare la Terra, *oppure* i gemelli non sono mai stati fermi, ma si sono mossi in modi diversi, come possono testimoniare innumerevoli osservatori dai loro innumerevoli sistemi inerziali.

**Maurizio Cavini**

Febbraio 2014

## Riferimenti

<http://www.mauriziocavini.it/Testi/Spigolature/Spighe4.html>

cavini.maurizio@gmail.com



Quest'opera è stata rilasciata con licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 3.0 Unported. Per leggere una copia della licenza visita il sito web <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> o spedisci una lettera a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.