# Relatività sotto processo

## Pendolo balistico

In un forum di scienzematematiche.it un utente, che ama interrogarsi sulla relatività (nickname: rdrglg), ha posto un quesito che utilizza un pendolo balistico. Il pendolo balistico è un dispositivo inventato da Benjamin Robins nel 1742 per misurare la velocità di un proiettile. Conoscendo la massa del proiettile e quella del pendolo di legno nel quale il primo va a conficcarsi con urto anelastico, si può ricavare la velocità del proiettile misurando l'oscillazione del pendolo. Ma poiché il moto è relativo (cioè dipende dal sistema di riferimento dell'osservatore), e poiché talvolta si legge che il moto aumenta la massa dei corpi (ma ritengo sia più corretto dire che aumenta l'energia totale, il ché è una cosa diversa), rdrglg si domanda com'è possibile, nel caso di velocità molto elevate, che l'oscillazione del pendolo appaia coerente sia all'ipotesi del proiettile in moto, che immaginando in moto il pendolo (quindi due ipotesi in cui il rapporto tra le "masse" dovrebbe essere diverso).

Diciamo intanto che per rendere evidenti gli effetti della relatività ristretta occorrono altissime velocità, ed è illusorio pensare che un impatto di quella violenza possa lasciare integro il pendolo. Inoltre l'urto disperderebbe presumibilmente una grande quantità di energia (ad esempio sotto forma di radiazione elettromagnetica). Oltre una certa velocità è anche irrealistico pensare che le strutture del pendolo possano resistire alle sollecitazioni senza spezzarsi. Anche la forza di gravità necessaria a limitare l'ascesa del pendolo dovrebbe essere enorme. Ma come esercizio teorico, semplificando l'esperimento, possiamo cercare di calcolare l'effetto dell'urto anelastico tra due corpi di cui si conoscano masse e moto, osservati da sistemi di riferimento diversi, e che dopo l'urto si fondano senza dispersione di energia in un corpo unico (somma dei due originari). Corpo di cui vogliamo calcolare la velocità e la massa. Utilizzerò i simboli $\mathbf{m_0}$(massa a riposo), **v**(velocità di un corpo), **c** (velocità della luce), **E**(energia totale), **γ**(fattore gamma, che per un corpo fermo equivale ad 1, a basse velocità cresce di pochissimo, mentre è un numero sempre più vicino all'infinito avvicinandosi alla velocità della luce), **P** (quantità di moto).

Ricordiamo che la relatività dichiara una sostanziale equivalenza tra massa ed energia, espressa dalla nota formula:

$E=mc^2$

a cui per precisione preferirò $E=\gamma m_0 c^2$. Inoltre se $c=1$ e quindi $c^2=1$ si può semplificare ulteriormente in $E=\gamma m_0$.

Gamma si calcola con:

$\gamma=1/\sqrt{(1-(v^2/c^2))}$

se $c^2=1$ e v è espressa come frazione di c allora si può ricorrere alla semplificazione $\gamma=1/\sqrt{(1-v^2)}$. Utilizzerò perciò le seguenti formule:

| | |
|---|---|
| $\gamma = 1 / \sqrt{(1 - v^2)})$ | : gamma = 1 / radice (1 - velocità$^2$) |
| $E = \gamma m_0$ | : energia totale = gamma x massa a riposo |
| Ecinetica = $(\gamma - 1) m_0$ | : energia cinetica = (gamma - 1) x massa a riposo |
| $P = \gamma m_0 v$ | : quantità di moto = gamma x massa a riposo x velocità |
| $m_0 = E / \gamma$ | : massa a riposo = energia totale / gamma |
| $v = P / E$ | : velocità = quantità di moto / energia totale |

L'energia totale di un corpo ($\gamma m_0$) si ottiene sommando l'energia della sua massa ($1m_0$) all'energia cinetica dovuta al suo moto ($(\gamma-1)m_0$). La massa è invariante, cioè deve essere misurata nello stesso modo da qualsiasi sistema di riferimento la si osservi; la velocità invece è un valore relativo, ne consegue che l'energia totale di un corpo è misurata diversamente dai vari osservatori, in base al moto relativo che essi assegnano al corpo che stanno esaminando; l'energia totale e la quantità di moto di un sistema devono sempre essere conservate (quando sono misurate dallo stesso osservatore), anche dopo eventi come un urto. Nell'esperimento che andiamo ad analizzare dovremo perciò dimostrare che un sistema costituito inizialmente da due corpi mantiene inalterate anche dopo l'urto sia l'energia totale complessiva, che la sua quantità di moto. L'oggetto generato dall'urto dovrà avere la stessa massa per tutti gli osservatori, ma questo non significa che dovrà essere la somma esatta dei due corpi originari. Infatti in determinate circostanze, come urti particolarmente violenti, una parte della massa può "scomparire" trasformandosi in energia di varia natura (come avviene nelle centrali nucleari), oppure una parte dell'energia cinetica può trasformarsi in nuova massa (come può avvenire con protoni accelerati e fatti scontrare negli acceleratori di particelle, ad esempio al CERN di Ginevra).

Assegniamo il valore 1 alla velocità della luce (c=1) e 1 all'energia rappresentata dalla massa in quiete di 1Kg (1E=1Kg). Ipotizziamo l'urto anelastico tra i due corpi **M** (con massa di 1 Kg) e **m** (massa di 0,5 Kg), in moto relativo tra loro alla velocità di 0,866025c (cioè 86,6025% della velocità della luce, questo per avere un valore $\gamma=2$), che dopo l'urto si fondono in un corpo unico **Mm**, di cui vogliamo calcolare massa, energia totale, energia cinetica, velocità e quantità di moto. Tutto questo ipotizzando prima come fermo il corpo M e poi come fermo il corpo m.

## M è fermo e m è in moto

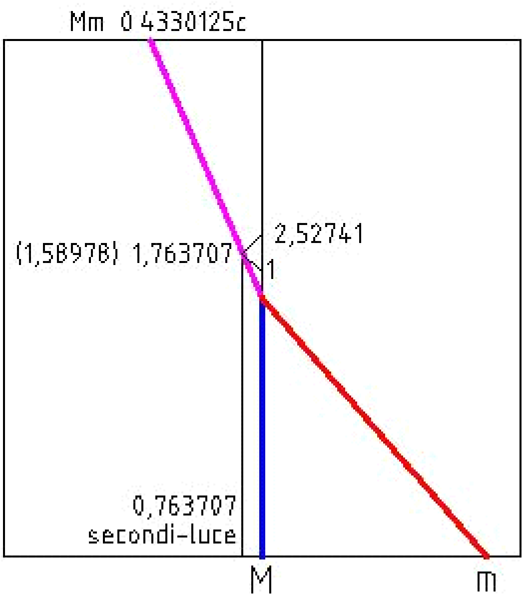
| | massa | velocità | gamma | quantità di moto | E | Ecinetica |
|---|---|---|---|---|---|---|
| M | = 1Kg | 0c | 1 | 0 | 1 | 0 |
| m | = 0,5Kg | 0,866025c | 2 | 0.866025 | 1 | 0,5 |
| M+m | = 1,5Kg | | | 0,866025 | 2 | 0,5 |
| Mm | = 1,802776Kg | 0,4330125c | 1,1094 | 0.866025 | 2 | 0,197223 |

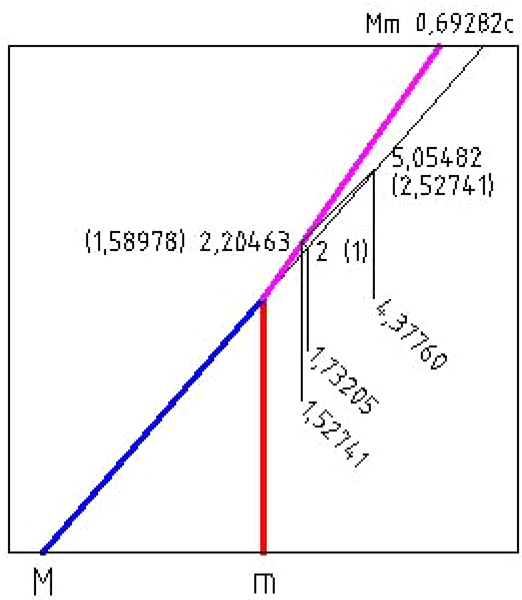
## M è in moto e m è fermo

| | massa | velocità | gamma | quantità di moto | E | Ecinetica |
|---|---|---|---|---|---|---|
| M | = 1Kg | 0,866025c | 2 | 1.73205 | 2 | 1 |
| m | = 0,5Kg | 0 | 1 | 0 | 0,5 | 0 |
| M+m | = 1,5Kg | | | 1.73205 | 2,5 | 1 |
| Mm | = 1,802777Kg | 0,69282c | 1,386749 | 1.73205 | 2,5 | 0,697222 |

Come detto il corpo Mm deve conservare quantità di moto ed energia totale di M + m, che nelle due circostanze esaminate sono valori diversi (0,866025 e 1,73205 come quantità di moto, 2 e 2,5 come energia totale). Utilizzando la formula $v=P/E$ posso perciò calcolare la velocità di Mm, con la formula $\gamma=1/\sqrt{(1-v^2)}$ calcolare il valore di gamma e con la formula $m_0=E/\gamma$ calcolarne la massa. Mm ha in entrambi i casi la stessa massa (1,80277...), rispettando quindi l'invarianza della massa rispetto ai sistemi di riferimento. Mm ha in entrambi i casi velocità minore del corpo precedentemente in moto e parte della sua energia cinetica (circa 0,30277...) si è trasformata in massa aggiuntiva.

Nei due seguenti diagrammi di Minkowski (in cui abbiamo sul piano orizzontale lo spazio e su quello verticale il tempo, con il futuro verso l'alto) è documentato l'urto visto dai due sistemi di riferimento, a sinistra con M fermo e m in moto a 0,866025c (con Mm a 0,4330125c), e a destra M a 0,866025c e m fermo (con Mm a 0,69282c). Viene anche evidenziato il percorso di un raggio di luce che rimbalza tra il sistema di M ed Mm, per controllare che la velocità della luce risulti indipendente dal sistema di riferimento, come richiesto dai postulati della relatività. Se dato come tempo 0 il momento dell'urto, 1 secondo (relativo) dopo l'urto viene inviato un segnale dal sistema inerziale dove giaceva M, verso Mm e ritorno, esso viene ricevuto al secondo 1,58978 (relativo) da Mm e torna a M il secondo 2,52741 (relativo). Ricordiamo infatti che gli orologi sono rallentati di un fattore gamma in base alla loro velocità ($\gamma$= 1 per i corpi fermi). Quindi nel primo diagramma per Mm 1,58978x1,1094= 1,763707, mentre nel secondo diagramma 1x2=2 1,58978x1,386749= 2,20463 2,52741x2=5,05482. Chi ha la pazienza di calcolare nel dettaglio percorsi e tempi del raggio di luce e dei corpi M e Mm, può confermare che i numeri sono quelli giusti.



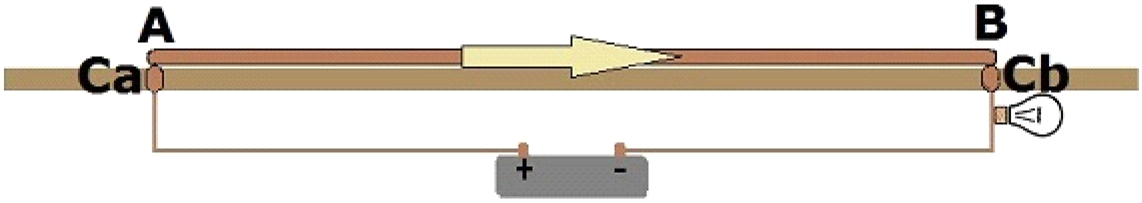

Se tornando al quesito iniziale consideriamo m il proiettile, M il macchinario con il pendolo e Mm il peso di legno che ha incorporato il proiettile, si potrebbe osservare che Mm nei due casi si allontana da M con velocità diverse: 0,4330125c nel primo caso e 0,173205c (0,866025-0,69282) nel secondo. Ovviamente il pendolo deve essere osservato oscillare da M nello stesso modo, a qualsiasi sistema di riferimento M appartenga, ma infatti le velocità misurabili nel secondo diagramma non sono misurate da M, bensì da m. I tempi identici in entrambi i casi (relativamente a M) con cui il segnale luminoso ritorna (2,52741) documentano la stessa apparente velocità di allontanamento (0,4330125c) se ad osservare è M (cioè lo strumento di misura del pendolo), qualunque sia il moto che gli si vuole assegnare. Nel secondo caso infatti (nel sistema di riferimento di m)  Mm deve allontanarsi più lentamente, perché si presume che M misuri la velocità dell'oscillazione (metri al secondo) con un orologio rallentato dalla dilatazione temporale e su un corpo-pendolo contratto dalla velocità.

Riassumendo: dopo l'urto abbiamo in entrambi i casi un Mm con massa 1,802777Kg che si allontana da M con velocità 0,4330125c (se misurata dallo strumento di misura del pendolo), ed è perciò plausibile sostenere che lo strumento restituirà la stessa misura in entrambe le ipotesi. In un caso abbiamo un peso in moto, vincolato attraverso un braccio mobile a un macchinario fermo che tenta di rallentarlo, e una forza di gravità che cerca di ostacolarne il sollevamento. Nell'altro caso il peso si muove più rapidamente e in direzione opposta, ma ancor più velocemente si muove il macchinario, che cerca quindi con il suo braccio mobile di accelerarlo ulteriormente; la forza di gravità cerca anche qui di ostacolarne il sollevamento. Non sono in grado di proseguire nei calcoli e mi fermo qui.

## Lampadina e circuito elettrico

Un lettore, Massimo, dopo aver letto la mia pagina "Mattone e tavolo forato", mi ha proposto una variante che include un circuito elettrico collegato ad una batteria e una lampadina. Modifico leggermente il suo quesito originale, senza cambiarne il senso. Il regolo **AB** (che scivola senza attrito verso destra su un tavolo, il quale fa da supporto al circuito **Ca-Cb** corredato con lampadina e batteria) è conduttore di corrente e in quiete è lungo esattamente come la distanza Ca-Cb, cioè circa 300.000 Km, ovvero un secondo-luce (ho scelto una misura molto grande per non lavorare con frazioni di secondo troppo piccole).

In sintesi Massimo si chiede: "Il moto è relativo, ma contrae le misure dei corpi. Quindi l'osservatore solidale col tavolo vede il regolo contratto, cioè troppo corto per chiudere il circuito e accendere la lampadina; l'osservatore solidale col regolo vede invece i contatti del tavolo abbastanza vicini per chiudere il circuito. La lampadina si accenderà oppure no?"




Se il regolo non si muovesse e fosse appoggiato sul circuito, chiuderebbe esattamente i contatti e la lampadina sarebbe accesa. Bisogna però sottolineare che, poiché è impossibile avere informazioni istantanee a distanza, la lampadina è accesa quando il contatto B-Cb è chiuso e il contatto A-Ca era chiuso ***n* secondi fa**. Se noi apriamo o chiudiamo il circuito in A-Ca, quest'*informazione* (che immagino consista in un particolare stato del campo elettrico, e che immagino propagarsi alla velocità della luce) viaggia verso destra fino a raggiungere B-Cb 1 secondo dopo l'apertura/chiusura. Possiamo quindi dire che se il regolo si muove verso destra ad una velocità che lascia inalterata la sua lunghezza, e ipotizziamo che la chiusura di B-Cb sia sostanzialmente simultanea all'apertura di A-Ca, **la lampadina resterà accesa per 1 secondo**.

Adesso diciamo che **io sono la lampadina**, per me il regolo AB si muove verso destra ad un decimo della velocità della luce (circa 30.000 Km al secondo, ovvero 0.1c, con valore $\gamma$=1.005037 e 1/$\gamma$=0.994987), il ché contrae le sue dimensioni e riduce la sua lunghezza del 5,013‰ (adesso il regolo è lungo 0,994987 secondi-luce) e quindi il contatto A-Ca si aprirà quando B dista ancora da Cb 0,005013 secondi-luce, una distanza che il regolo percorrerà in 0,05013 secondi (0.00513 secondi-luce / 0.1c). **La lampadina resterà quindi accesa** 1 secondo (il tempo che l'*informazione* dell'apertura del circuito impiega per andare da Ca ad Cb) - 0,05013 (il tempo che intercorre tra l'apertura di A-Ca e la chiusura di B-Cb, durante il quale la lampadina non può ancora accendersi) = **0,94987 secondi**.

Adesso diciamo che **io sono il regolo**, sono fermo e lungo 1 secondo-luce, ed è il circuito a muoversi nell'altro senso, verso sinistra a 0,1c, e questo contrae spazialmente il circuito e avvicina Ca-Cb alla distanza di 0,994987 secondi-luce. Quando il contatto B-Cb si chiude il regolo AB sporge oltre Ca di 0,005013 secondi-luce, una distanza che il circuito percorre in 0,05013 secondi, dopo di ché il contatto A-Ca si apre. A questo punto A dista da Cb 0,994987 secondi-luce e l'*informazione* dell'apertura del contatto viaggia verso Cb alla velocità della luce (c oppure 1c), mentre Cb si muove a 0,1c verso l'*informazione*. La distanza di 0,994987 secondi-luce viene coperta in (0.994987 / 1.1) 0,904533 secondi; **la lampadina resterà accesa** 0,05013 + 0,904533 = **0,954663 secondi**.

Questo tempo è (0,954663 - 0,94987) 0,004793 secondi in più di quanto misurato mentre ero la lampadina. Ma il tempo è relativo e quindi, nel caso di velocità elevate tra i soggetti, quando si va a calcolare il periodo di accensione della lampadina, questo dipende anche da quale osservatore compie la misura. Mentre sono il regolo, ritengo la lampadina (e un suo eventuale orologio) in moto e quindi immersa in un tempo rallentato, il suo orologio misura i tempi come se fossero più brevi e bisogna utilizzare 1/$\gamma$ oppure $\gamma$, quindi: 0,954663 x 0,994987 = 0,94987, oppure 0,954663 / 1.005037 = 0,94987.

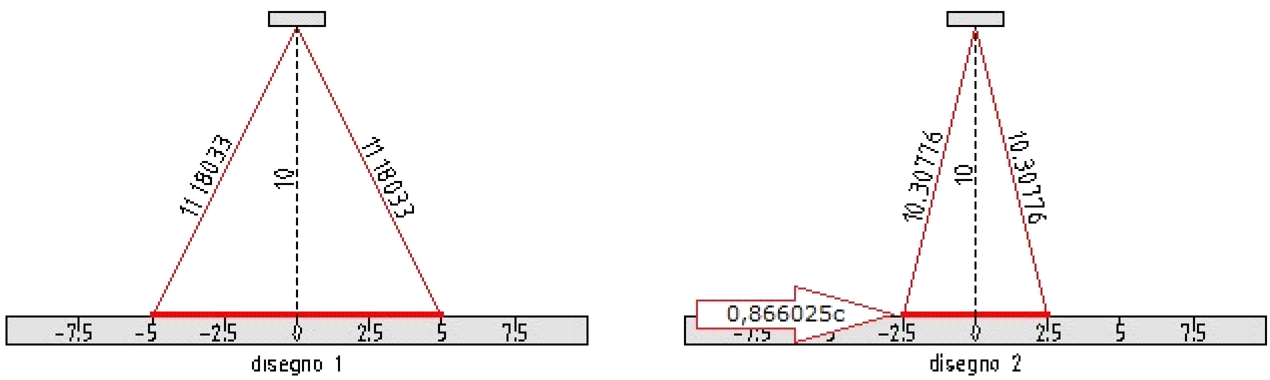
Possiamo perciò dire che osservando gli avvenimenti dal punto di vista del regolo oppure del circuito con batteria, la lampadina rimane accesa per un periodo che viene misurato da entrambi come coerente con le aspettative.

## L'osservatore

Il mio interlocutore è rimasto abbastanza soddisfatto dalla precedente risposta, ma ha continuato ad interrogarsi con un'altro quesito. Anche in questo caso modifico la domanda originale, mantenendone comunque il senso.

Immaginiamo un regolo che scorre su un tavolo, il quale è contrassegnato periodicamente con delle misure. Un osservatore guarda dall'alto. Se il regolo fosse fermo l'osservatore potrebbe valutarne immediatamente le dimensioni leggendo le misure corrispondenti sul tavolo. Qualcuno potrebbe pensare che nel caso in cui regolo e tavolo fossero reciprocamente in moto, per la contrazione delle lunghezze che interessa i corpi in movimento, la misura dovrebbe apparire diversa in base a chi si stà realmente muovendo. Ma non è così.

Immaginiamo che un regolo rosso che in quiete misura in lunghezza 10 secondi-luce (scelgo ancora misure molto grandi per non lavorare con frazioni di secondo troppo piccole) si muove verso destra a 0,866025c (cioè 86,6025% della velocità della luce, questo per avere un valore di $\gamma=2$, che dimezza le misure) e che un osservatore (o una fotocamera) si trovi sospeso sul tavolo ad un'altezza di 10 secondi-luce. Il tavolo è lungo in quiete 20 secondi luce, ha una tacca denominata zero al centro e ulteriori tacche a destra e sinistra ad una distanza tra loro di 2.5 secondi luce. Osserviamo da subito che i vari punti che costituiscono il regolo si trovano a distanze diverse dall'osservatore. Ne consegue che nel caso di un regolo in moto i punti contemporaneamente visibili dall'osservatore potrebbero appartenere a posizioni occupate in tempi diversi. L'immagine dei corpi in moto veloce subisce anche altre interessanti deformazioni, come la rotazione di Terrel-Penrose.

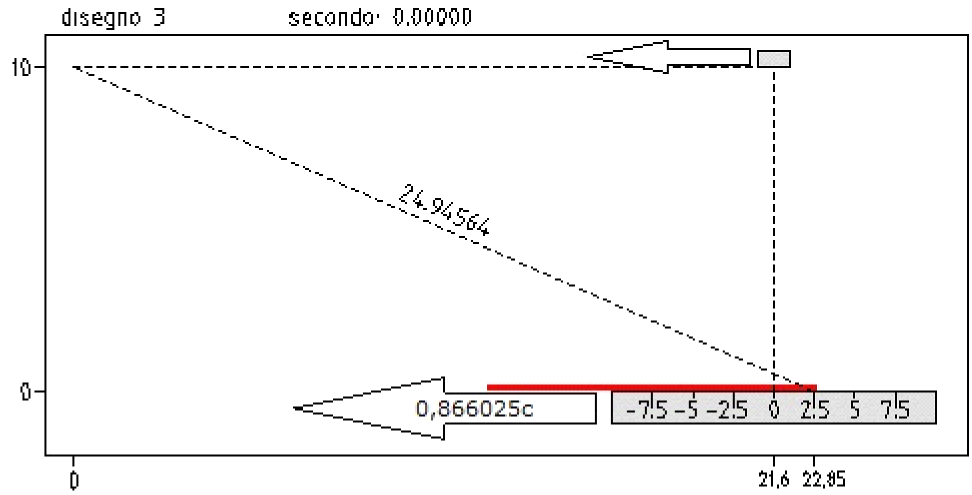



Nel disegno 1, in cui tutti i soggetti sono fermi tra di loro, l'osservatore vede il regolo estendersi verso destra e verso sinistra di 5 secondi-luce (come indicato dai contrassegni del tavolo); l'oggetto appare quindi lungo 10 secondi-luce.

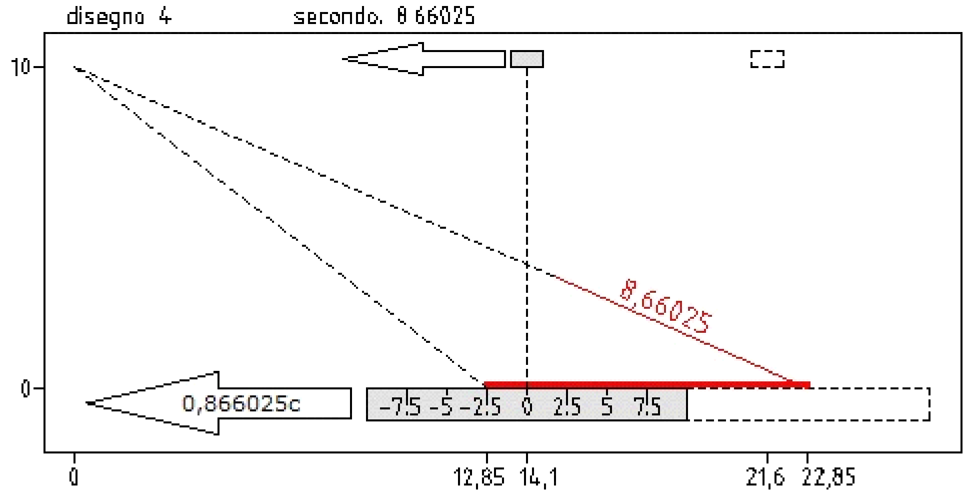
Nel disegno 2 invece il regolo rosso è in moto verso destra a 0,866025c e le sue dimensioni sono dimezzate (lunghezza/γ = 10/2), infatti nel momento in cui transita sopra la parte centrale del tavolo le sue estremità si sovrappongono ai contrassegni -2.5 e 2.5 (misura perciò 5 secondi-luce). L'osservatore vede quest'immagine in ritardo e anche deformata, poiché i raggi di luce impiegano del tempo per raggiungerlo (10 secondi dal punto centrale del regolo e 10.30776 dalle estremità), ma possiamo dire che esiste un momento in cui vede entrambe le estremità del regolo in corrispondenza dei contrassegni -2.5 e 2.5.

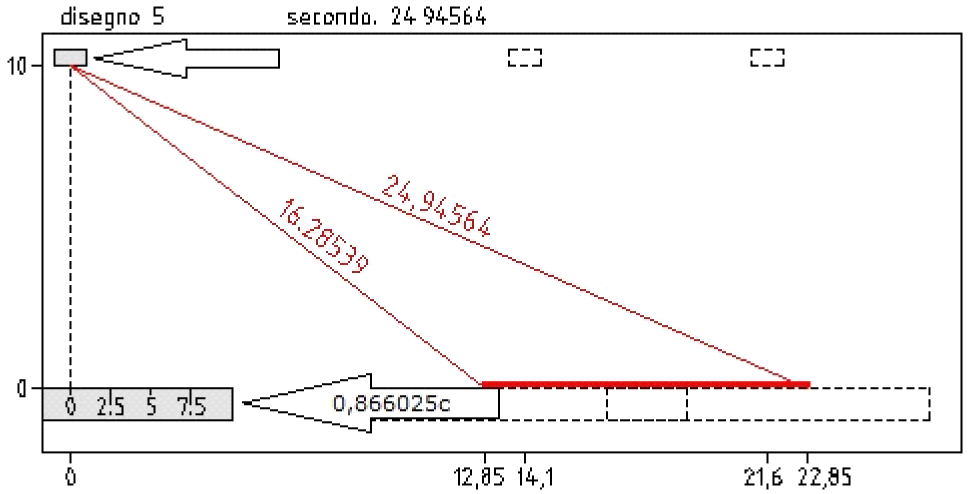
Adesso si potrebbe intuitivamente pensare che se in moto fossero tavola e osservatore (con un tavolo contratto a soli 20/2 = 10 secondi-luce, la stessa lunghezza del regolo fermo) l'osservatore vedrebbe il regolo più grande di prima. Ma la realtà è diversa. Possiamo anzi dimostrare che anche in questo caso esiste un momento in cui l'osservatore vedrà contemporaneamente le estremità del regolo in corrispondenza dei contrassegni -2.5 e 2.5

Immaginiamo che il regolo sia fermo e il sistema tavolo-osservatore si stia muovendo a 0.866025c verso sinistra (disegno 3); il tavolo si è contratto a 10 secondi-luce e le sue tacche indicano perciò misure doppie del reale. Ipotizziamo che nel momento denominato zero l'estremità destra del regolo collimi con il contrassegno 2.5 (cioè 1.25 secondi-luce a destra del segno 0). Questa immagine si diffonde in tutte le direzioni, ma non è in grado di raggiungere istantaneamente l'osservatore nella sua attuale posizione. Lo raggiungerà invece 24.94564 secondi dopo, mentre l'osservatore si sarà spostato verso sinistra di (24.94564 x 0.866025c) 21.60355 secondi-luce.




8.66025 secondi dopo (disegno 4), la parte sinistra del regolo è in corrispondenza del contrassegno -2.5 e anche quest'immagine si diffonde in tutte le direzioni, ma raggiungerà l'osservatore in moto soltanto 16.28539 secondi dopo (disegno 5), contemporaneamente all'immagine dell'estremità destra del regolo quando questa era sul contrassegno 2.5




Abbiamo perciò dimostrato che esiste un momento in cui l'osservatore vede la stessa immagine (un regolo che va da -2.5 a 2.5), indipendentemente da chi (tra osservatore-tavolo oppure regolo) si voglia considerare in moto a 0.866025c, rendendo impossibile individuare il moto assoluto attraverso osservazioni sperimentali.

**Maurizio Cavini**
27 Marzo 2014

**Riferimenti**

http://www.mauriziocavini.it/Testi/Spigolature/Spighe7.html
cavini.maurizio@gmail.com

Ringrazio il Dr. Gianluca Raselli per alcuni utili suggerimenti